

D → 最近のドイツ技術

水と蒸気の限界線上の状態量の 電子計算機のための近似式

Approximate Expressions for State Variables of Water and Steam on Their Boundary Lines for Application of Electric Computer

I. 概 要

デジタル計算用には、水蒸気の限界線上および湿り蒸気範囲に対して、飽和圧力および飽和温度を独立変数とした近似式が用いられる。状態量の算出用としてその近似式には十分な精度と同時に計算時間を非常に短くすることが要求される。そのためにたとえば圧力と温度は結合して独立変数をつにする。なお飽和領域より臨界点までの全領域に対して、飽和温度の飽和圧力による近似関数表現およびその反対の表現が用いられる。

デジタル計算機によって水蒸気のプロセスの一連の計算を行なうためには、その計算機の中に、水と水蒸気の熱力学的状態量、たとえば、圧力、温度、比容積、エンタルピーおよびエントロピーなどの間の関係式を記憶しておくことが必要である。われわれは次のように考えることができる。すなわち、直接に蒸気表に載っている値またはその表から選んだある値—これらはいわゆる“わくに入れた値”または“基礎になる値”の形式で—をそれに適当な補間プログラムとともに計算機に入れて記憶させることができる。しかし、この方法によると記憶装置は非常に大きくなり、さらに読取り時間も書き込み時間もますます長くなるので、計算機に関数の形で憶えさせ、その関数から状態量を自動的に計算させる方が目的に適っている。

計算機利用に適している上に述べたような経験式はドイツ国内外ですでにいろいろ発表されている^(1~3)。シュミットとその協力者は過熱蒸気と水の状態を表わす関数として簡単な式を発表した⁽⁴⁾⁽⁵⁾。これは熱力学で必要となるあらゆる計算（たとえば、密度の計算）の役に立ち、非常に包括的なものである。彼等は実際の計算に最も適当な式として

$$z=f(p, T) \quad \dots\dots\dots(1)$$

を用いた。ここに p は圧力、 T は温度であり、 z は比容積 v 、比エンタルピー i あるいは比エントロピー s を表わす。この関数は VDI の蒸気表の最近出版の第 6 版の値に基礎を置くものであり、その適用範囲は左側と右側

の境界線（0℃ より 350℃ および 0℃ より 313℃ まで）を含めた水と過熱蒸気的全領域に及ぶ。ただし、臨界点の近くの小部分だけは除外する。湿り蒸気の範囲に対しては

$$z=z'+x(z''-z') \quad \dots\dots\dots(2)$$

が成立つ。ここに

沸騰中の水に対しては $z'=v'$ 、 i あるいは s'

凝結中の蒸気に対しては $z''=v''$ 、 i'' あるいは s'' であり、同時に x は蒸気の含有率（乾き度）を表わす。

ある一つの状態量だけで決定できる飽和状態においてはもう一つ関数関係式が成り立つ。たとえば、飽和圧力 p_s と飽和温度 T_s 関係は、オスボンとメイヤーによって蒸気圧力曲線として与えられており、また、トラツツによってさらに改良された式⁽⁵⁾が与えられた。この蒸気圧力曲線の式を式(1)に代入して次の関数を得る。

$$z'=z'(p_s) \text{ および } z''=z''(p_s) \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$z'=z'(T_s) \text{ および } z''=z''(T_s) \quad \dots\dots\dots(4)$$

しかし、この式による計算は大きさで比較的長い時間を必要とする。そのため式(3)または式(4)で表わされる特性を生かし、かつ、もっと簡単な式ならびに飽和温度と飽和圧力の間のできるだけ単純な関係式を用いる方が目的に適用することがわかる。

次にこのような近似式の求め方を明らかにし、また、その解を示す。すなわち、この式によれば特に境界線上の v 、 i および s の新しい状態式⁽⁴⁾⁽⁵⁾による値およびオスボンとメイヤーによる改良された蒸気圧力曲線⁽⁵⁾上の値を実用上十分な精度で計算できる。

II. 近似化の着眼点

境界線上における状態量 v 、 i および s の飽和温度 T_s による関数表現は多項式を用いることによって非常に容易にまた間隔をおくことなしに、これと対応する飽和圧力 p_s による関数表現として近似できる。

この方法により飽和温度が独立変数として選ばれる。大規模な計算問題における関数関係による表現においては、多項式を用いると大きい利益がある。すなわち一

方において多項式は、オーナーによる特別な表現

$$y = \{[(a_n X + a_{n-1}) X + a_{n-2}] X + \dots + a_1\} X + a_0 \dots \dots \dots (5)$$

の乗算、加算および減算の簡単な算数的手法を用いるので、計算時間が非常に短いこととともに特に数値計算に対して適切である。他方、多項式表現によれば一般に計算機のわずかな計算命令によって、任意の多項式次数 n に対して計算プログラムを一般化できる。それゆえ多項式で表わされた異なった関係式は、同じプログラムで処理できる。そこで計算機には、単に係数の異なったグループだけを記憶させておけばよい。

式(5)のアーギュメント X が求められるべき曲線自身の独立変数でなく、その関数であるとき、すなわち $X=f(x)$ であるときも多項式の基礎的な形式、したがって計算機の上記の単純な計算方法は変わらない。

この関数 $f(x)$ は近似すべき曲線にほぼ合うように選ぶ。たとえば式(8)においては $X=\ln x$ と選ぶ。このように選ぶことにより面倒な曲線でも比較的少ない次数の多項式、したがってまたそこに対応する少ない係数によって充分正確に近似できる。

その多項式から近似値の微係数を求めなければならないときには、不幸にしてしばしばその多項式が波のような形状のゆえに近似式として不適当なこともある。

デジタル計算機を用い、誤差の自乗の和を最小にするガウスの方法によって多項式の係数を求めることができる。(6) 多項式を用いる上述の方法によれば、多くの場合あまり費用がかからずすぐれた結果が得られる。

さて次のことがわかる。すなわちこの近似方法による場合には多くの場合、領域の端部に生じる最大誤差が、平均誤差の2倍ないし3倍を越すことはほとんどなく、ただ近似曲線が放物線によって再現できる場合においてのみ上記の大きさとなる。

上述の事柄より、チェビシェフのよりすぐれた方法は、なにも利益を期待できなかった。

III. 近 似 式

1. 係数決定のための基礎的な値

多項式の係数の決定に対する基礎として、新しい状態方程式によって与えられる状態値が役立つ。

すなわちここでは、飽和温度のいろいろの整数値にオスボーンとメイヤーによる改良された蒸気圧力曲線の方程式からの10けたの飽和圧力の値が代入された。これらの値からまた誤差曲線が引かれる。多項式の係数の計算に対してできるだけ正確な出発値をうるために、飽和

圧力 p_s の場合には有効けたの大きな設定数が必要である。VDIの蒸気表の丸めを施した値は、このためには正確ではない。

2. 蒸気圧力曲線

臨界点までの蒸気圧力曲線の値の表現は、その曲線の指数関数的特性のために、一種類の多項式では、 $p_s = f(t_s)$ の形における多項式の数少ない項数をもっては不可能である。

そこで、ここでの目的のために

$$p = e^{f(t_s)} \text{ または } \ln p = f(t_s) \dots \dots \dots (6)$$

という表現を導入する。式(6)において $f(t_s)$ は次の多項式で表わされる。

$$\ln \left(\frac{p}{at} \right) \sum_{v=0}^9 a_v \left(\frac{t_s}{100^\circ\text{C}} \right)^v \dots \dots \dots (7)$$

ここで係数は、

$a_0 = -5.078709984$	$a_5 = +2.477563380 \cdot 10^{-1}$
$a_1 = +7.270489907$	$a_6 = -8.659024966 \cdot 10^{-2}$
$a_2 = -3.033726807$	$a_7 = +2.015339284 \cdot 10^{-2}$
$a_3 = +1.256759065$	$a_8 = -2.693452728 \cdot 10^{-3}$
$a_4 = -5.608659370 \cdot 10^{-1}$	$a_9 = +1.553179872 \cdot 10^{-4}$

であり、適用範囲は $0 \leq t_s \leq 374.15^\circ\text{C}$ である。

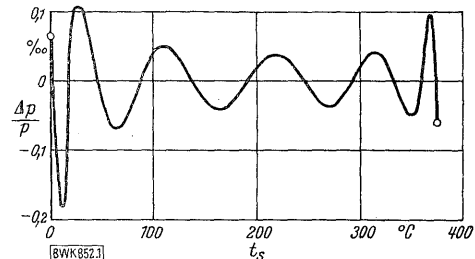
上の式の逆にはもちろん $t_s = f(\ln p)$ の表現が用いられ、次の多項式が導かれる。

$$\frac{t_s}{^\circ\text{C}} = \sum_{v=0}^{11} a_v \left[\ln \left(\frac{p}{at} \right) \right]^v \dots \dots \dots (8)$$

ここで係数は

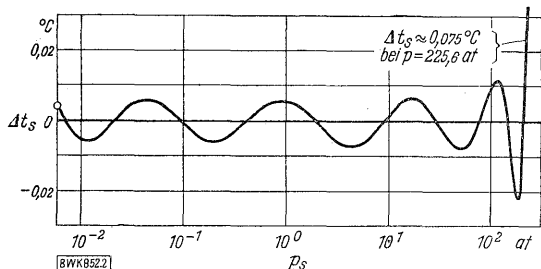
$a_0 = +9.909271199 \cdot 10^1$	$a_6 = -3.739348425 \cdot 10^{-4}$
$a_1 = +2.785424215 \cdot 10^1$	$a_7 = -1.741775190 \cdot 10^{-5}$
$a_2 = +3.75357647$	$a_8 = +2.207171179 \cdot 10^{-5}$
$a_3 = +2.107780463 \cdot 10^{-1}$	$a_9 = +1.534373134 \cdot 10^{-6}$
$a_4 = +2.129682011 \cdot 10^{-2}$	$a_{10} = -4.268568510 \cdot 10^{-7}$
$a_5 = +1.328377290 \cdot 10^{-3}$	$a_{11} = -4.292460291 \cdot 10^{-8}$

であり、適用範囲は $0.006228 \leq p_s \leq 225.6 \text{ at.}$ である。



第1図 飽和圧力を表す多項式の値のオスボーンとメイヤーによる改良された蒸気圧力曲線の値に対する相対誤差

Fig. 1. Relative error of polynomial for saturation pressure against steam pressure curve improved by Osborne and Myers



第2図 飽和温度を表わす多項式の値のオスボーンとメイヤーによる改良された蒸気圧力曲線から反覆法によって求めた値に対する相対誤差

Fig. 2. Error of polynomial for saturation temperature against values calculated by iteration from steam pressure curve improved by Osborne and Myers

第1図と第2図に、式(7)と式(8)の誤差曲線を示す。この偏差は、オスボーンとメイヤーによる改良された蒸気圧力曲線の値に立脚する。この圧力曲線によって式(8)の決定に必要な“かくあるべき飽和温度”の値は反覆法により 10^{-8} °C の不精確さで決定される。

3. 左側の境界曲線上(飽和水)の状態量に対する式
比容積は次の式で表わす。

$$\frac{v'}{\text{m}^3/\text{kg}} = \sum_{\nu=0}^9 a_{\nu} \left(\frac{t_s}{100^{\circ}\text{C}} \right)^{\nu} \quad \dots\dots\dots(9)$$

ここに、係数は

$$\begin{aligned} a_0 &= +1.000118915 \cdot 10^{-3} & a_5 &= +5.242887504 \cdot 10^{-4} \\ a_1 &= +5.374053255 \cdot 10^{-6} & a_6 &= -2.865244952 \cdot 10^{-4} \\ a_2 &= -2.679147093 \cdot 10^{-5} & a_7 &= +9.066492599 \cdot 10^{-5} \\ a_3 &= +3.023771808 \cdot 10^{-4} & a_8 &= -1.543704125 \cdot 10^{-5} \\ a_4 &= -5.512656898 \cdot 10^{-4} & a_9 &= +1.096835734 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

であり、適用範囲は $0 \leq t_s \leq 350^{\circ}\text{C}$ である。

比エンタルピー i' は、次の式で表わす。

$$\frac{i'}{\text{kcal/kg}} = \sum_{\nu=0}^9 a_{\nu} \left(\frac{t_s}{100^{\circ}\text{C}} \right)^{\nu} \quad \dots\dots\dots(10)$$

ここに係数は

$$\begin{aligned} a_0 &= -1.135796422 \cdot 10^{-2} & a_5 &= +3.620722280 \cdot 10^1 \\ a_1 &= +1.014852419 \cdot 10^2 & a_6 &= -1.868389840 \cdot 10^1 \\ a_2 &= -1.063325361 \cdot 10^1 & a_7 &= +5.700027955 \\ a_3 &= +2.885444361 \cdot 10^1 & a_8 &= -9.465226031 \cdot 10^{-1} \\ a_4 &= -4.198634420 \cdot 10^1 & a_9 &= +6.607297878 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

であり、適用範囲は $0 \leq t_s \leq 350^{\circ}\text{C}$ である。

比エントロピー s' は次の式で表わす。

$$\frac{s'}{\text{kcal/kg grad}} = \sum_{\nu=0}^9 a_{\nu} \left(\frac{t_s}{100^{\circ}\text{C}} \right)^{\nu} \quad \dots\dots\dots(11)$$

ここに、係数は

$$a_0 = -1.467084797 \cdot 10^{-5} \quad a_5 = +7.286116864 \cdot 10^{-2}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= +3.699525820 \cdot 10^{-1} & a_6 &= -3.597725941 \cdot 10^{-2} \\ a_2 &= -9.276089545 \cdot 10^{-2} & a_7 &= +1.063445516 \cdot 10^{-2} \\ a_3 &= +8.060741368 \cdot 10^{-2} & a_8 &= -1.722292449 \cdot 10^{-3} \\ a_4 &= -9.168241651 \cdot 10^{-2} & a_9 &= +1.176894419 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

であり、適用範囲は $0 \leq t_s \leq 350^{\circ}\text{C}$ である。

これらの三つの多項式の誤差は、第3図に示されている。

ポンプの計算用ならば、比容積の上に掲げた精度を必要とすることはまれにしかない。湿り蒸気の範囲におけるタービンプロセスに対しては、比容積の決定のための式(2)において v' はほとんど何時も無視できる。それは $v' \ll v''$ であるためである。

4. 右側の境界線上(飽和乾き蒸気)の状態量に対する式

乾き飽和蒸気の比容積は0と100°Cの間で非常に小さくなり、なお臨界点に至るまでさらに小さくなる。このような曲線に対しては一種類の多項式による近似式では非常に都合が悪い。しかし、圧力と容積との積 pv'' は温度にわずかししか影響されないで、温度に対し比較的平である。そこで pv'' の経過を次の式で近似できる。

$$\frac{pv''}{\text{at} \cdot \text{m}^3/\text{kg}} = \sum_{\nu=0}^8 a_{\nu} \left(\frac{t_s}{100^{\circ}\text{C}} \right)^{\nu} \quad \dots\dots\dots(12)$$

ここに、係数は

$$\begin{aligned} a_0 &= +1.285055584 & a_5 &= +3.414894206 \cdot 10^{-2} \\ a_1 &= +4.681031176 \cdot 10^{-1} & a_6 &= -1.538536066 \cdot 10^{-2} \\ a_2 &= -7.180810661 \cdot 10^{-3} & a_7 &= +3.218779827 \cdot 10^{-3} \\ a_3 &= +1.170245910 \cdot 10^{-4} & a_8 &= -2.538089179 \cdot 10^{-4} \\ a_4 &= -3.940971350 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

であり、適用範囲は、 $0 \leq t_s \leq 313^{\circ}\text{C}$ である。

比エンタルピー i'' は次式で表わされる。

$$\frac{i''}{\text{kcal/kg}} = \sum_{\nu=0}^6 a_{\nu} \left(\frac{t_s}{100^{\circ}\text{C}} \right)^{\nu} \quad \dots\dots\dots(13)$$

ここに係数は

$$\begin{aligned} a_0 &= +5.972570406 \cdot 10^2 \\ a_1 &= +4.335160398 \cdot 10^1 \\ a_2 &= +3.761675570 \\ a_3 &= -1.028883620 \cdot 10^1 \\ a_4 &= +6.681528737 \\ a_5 &= -2.252469249 \\ a_6 &= +2.456728183 \cdot 10^{-1} \end{aligned}$$

であり、適用範囲は $0 \leq t_s \leq 313^{\circ}\text{C}$ である。

比エントロピー s'' は次式で表わされる。

$$\frac{s''}{\text{kcal/kg yrd}} = \sum_{\nu=0}^7 a_{\nu} \left(\frac{t_s}{100^{\circ}\text{C}} \right)^{\nu} \quad \dots\dots\dots(14)$$

ここに、係数は

$$\begin{aligned} a_0 &= +2.186523255 & a_4 &= +6.525540478 \cdot 10^{-2} \\ a_1 &= -6.413159601 \cdot 10^{-1} & a_5 &= -2.065495781 \cdot 10^{-2} \\ a_2 &= +3.115571289 \cdot 10^{-1} & a_6 &= +3.575235841 \cdot 10^{-3} \\ a_3 &= -1.492069748 \cdot 10^{-1} & a_7 &= -2.510018689 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

であり、適用範囲は $0 \leq t_s \leq 313^\circ\text{C}$ である。

これら三つの式の誤差は、第4図に示されている。

5. 湿り蒸気の範囲のエンタルピーの圧力とエントロピーからの計算

多くの場合、たとえば、タービン中の等エントロピー膨張の計算の場合は圧力とエントロピーはわかっている。これら二つの状態量に対して、式(13)および(14)の適用範囲限界 313°C またはそれに対応する約 105 at までは式(2), (8), (10), (11), (13) および (14) を用いることによってエンタルピーが計算できる。しかし詳しい計算のやり方の記述は避ける。湿り蒸気範囲では等圧線は直線であり、 $i-s$ 線図における等圧線の傾きは単に絶対温度 T_s だけに影響される。このことは熱力学の第一および第二法則からわかることで次に示す。

$$\begin{aligned} dQ &= di - v dp \\ dQ &= T ds \end{aligned}$$

$p = \text{一定}$ の場合は $dp = 0$ であるから上式から

$$\begin{aligned} di &= T ds \\ i &= T \int ds = T s + C \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(15)$$

水の沸騰状態ではエンタルピー i' とエントロピー s' は温度 T_s に関係する。式(15)中にこれらの値を代入すると C に対して次式を得る。

$$C = i' - T_s' s' \quad \dots\dots\dots(16)$$

i' と s' は単に飽和温度のみに関係するので式(16)によって C もまた単に飽和温度のみによって与えられる。そこで C に対し次の多項式を得る。

$$\frac{C}{\text{kcal/kg}} = \sum_{v=0}^4 a_v \left(\frac{t_s}{100^\circ\text{C}} \right)^v \quad \dots\dots\dots(17)$$

ここに係数は

$$\begin{aligned} a_0 &= +2.746833794 \cdot 10^{-2} \\ a_1 &= -3.389038168 \cdot 10^{-1} \\ a_2 &= -1.751763324 \cdot 10^{-1} \\ a_3 &= +1.554915483 \\ a_4 &= -9.399678112 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

であり適用範囲は $0 \leq t_s \leq 350^\circ\text{C}$ である。これの最大誤差は約 0.026 kcal/kg であり、平均誤差は約 0.010 kcal/kg である。

式(15)と(17)から、エンタルピーに対しては次式を得る。

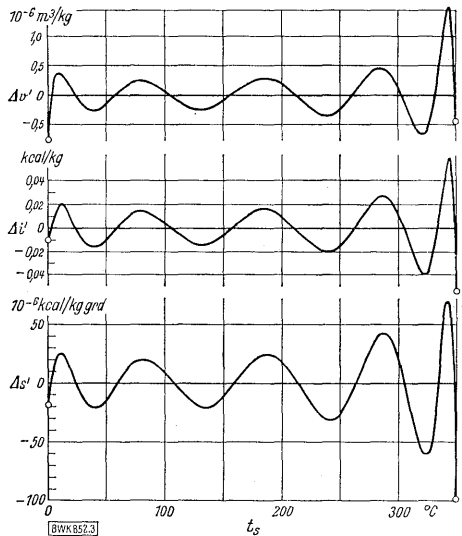
$$\begin{aligned} \frac{i}{\text{kcal/kg}} &= \frac{T_s s}{^\circ\text{K} - \text{kcal/kg grad}} + \sum_{v=0}^4 a_v \\ &\times \left(\frac{t_s}{100^\circ\text{C}} \right)^v \quad \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

式(16)には飽和温度と同時に 350°C まで成立つ多項式によって表わされる左側の境界線上の状態値 i' と s' のみが入ってくるので湿り蒸気のエンタルピーの計算は式(18)によって圧力約 169 at とそれに相当する飽和温度 350°C まで計算できるという大きい利益がある。ただし 313°C までしか計算できない右側の境界線は除外する。

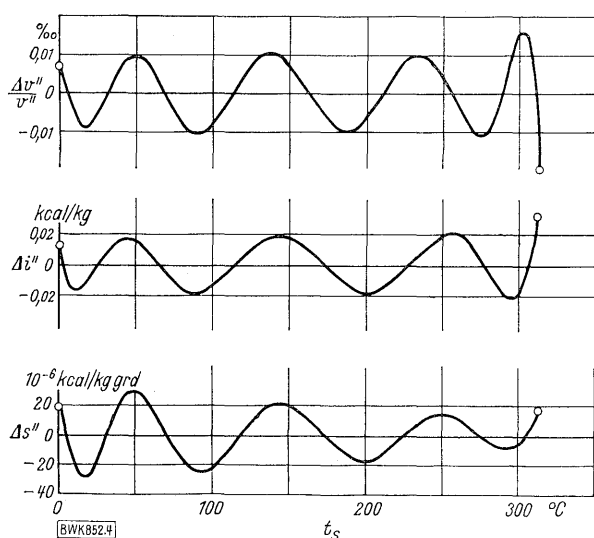
IV. 適用範囲と誤差

単一の式の場合与えられる適用範囲はしばしば境界曲線(4)(5)上の新しい状態方程式とオスボーンとメイヤーによって改良された蒸気圧力曲線(5)の適用範囲によってきまる。

近似多項式の範囲を臨界点まで延長することは目的に適合していないことがわかる。なぜならば、与えられた範囲の限界以外においては VDI の第6版の蒸気表中の状態値は図的に補間し、それを滑らかにしたものであるからである。これらの値で起こり得る誤差は 1934 年に国際的にきめたわくに入れた表による大きな許容誤差に基礎を置くもので、その値は低い温度領域の誤差に比較して非常に大きくなりうる。これらの状態値を 0°C より 374.15°C までの範囲に対して多項式の係数の決定のために用いるならば、その近似関数の全領域における良さは上の範囲に対する値以下になる。そこで状態値が一般に急に上昇あるいは下降する曲線の経過をたどる臨界点の



第3図 状態値 v' , i' および s' およびに対する多項式の新しい状態式による値に対する誤差
Fig. 3. Errors of polynomials for state values v' , i' and s' against values by new equations of state



第4図 状態値 v'' , i'' および s'' に対する多項式の新しい状態式による値に対する相対誤差および誤差

Fig. 4. Relative error and errors of polynomials for state values v'' , i'' and s'' against values by new equations of state

近傍において十分な精度を持たせるたせるためには、あらゆる場合に対して多項式の次数をより高く取らなければならないことがわかる。

本文で得られた近似式は上記の1934年の“わくに入った表の値”を与えるものであり、これは低温においてわずかな例外をもち、また許容誤差範囲に納まるものである。第1図より第4図によれば“かくあるべき値”よりの偏差は全体を通じて蒸気表の指定の精度以内にある。上述の式を導き出す場合には、その新しい状態式で計算された値ができるだけ正確に再現されるように特別な値を使用する。このようにして、これらの式が蒸気表の状態値あるいは近似式よりの値を使って導き出されたものであっても、熱工学の計算の際得られる結果の調和が取れるようにする。

これらの近似式の係数を8けたに丸めても誤差は無視できる。

V. 計算時間

本文の近似式から状態量を求める計算時間は、状態式を用いる際必要な計算時間の約1/10に減少される。既知のエントロピーと既知の圧力のもとで式(15)によって、

湿り蒸気のエントルピーを計算しなければならない場合に上の計算時間の差は特に大きくなる。すなわち、近似式が無いときには、何よりも先にオスボーンとメイヤーによる改良された蒸気圧力曲線から飽和温度 t_s を反復法によって求め、それから状態式の助けをかりて式(16)によって C の値を求めなければならないが、本文の場合には、式(8)より直接に t_s を求めたと同様にして式(17)から C が決定される。このようにして計算時間は40倍も短縮される。この例によって簡単な近似式の利用によっていかほどの利益が得られるかが明らかとなる。

参考文献

- (1) Hotes, H.: Bestimmung der Zustandsgrößen von Wasserdampf und Wasser auf digitalen Rechenautomaten. Allg. Wärmetechn. **9** (1960) S. 233/52, Auszug in BWK **11** (1959) Nr. 12, S. 575.
- (2) Stelz, W.G. u. G.J. Silvestri: The formulation of steam properties for digital computer application, Trans. Amer. Soc. Mech. Eng. **80** (1958) S. 967/73.
- (3) Holmes, A.C., u. R.S. Hollitch: A steam properties program for medium and large computers. Amer. Soc. Mech. Eng. paper no. 57 A 278 (1957).
- (4) Mayinger, F., E. Schmidt, u. H. Tratz: Neue Zustandsgleichungen für Wasserdampf unter Berücksichtigung ihrer Verwendung in elektronischen Rechenanlagen. BWK **14** (1962) Nr. 6, S. 261/66; Berichtigung in Nr. 7, S. 360.
- (5) Tratz, H.: Neue Zustandsgleichungen für flüssiges Wasser und eine verbesserte Gleichung der Dampfdruckkurve. BWK **14** (1962) Nr. 8, S. 379/83; Berichtigung in Nr. 10, S. 504.
- (6) Zurmühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1957. S. 334/40 u. 355/61.
- (7) Schmidt, E.: Technische Thermodynamik. Berlin/Göttingen/Heidelberg. Springer 1962, 9. Aufl.

原著者: H. Vesper
Näherungsgleichungen für die Zustandsgrößen
des Wassers und des Dampfes an den Grenz-
kurven zur Verwendung in elektronischen
Rechenmaschinen
B.W.K. **15** (1963) Nr. 1 Januar
訳者 研究部 電算研究室 吉江 充



*本誌に記載されている会社名および製品名は、それぞれの会社が所有する
商標または登録商標である場合があります。