UDC 621-523.8-503.5

トランジダイン制御系の最適化理論

三橋成生* 井上達夫**
Shigetaka Mitsuhashi Tatsuo Inoue

Optimum Adjusting Theory for TRASIDYN Control System

Synopsis

Recently, Fuji Electric Co., Ltd. has newly developed and standardized various kinds of transistorized control devices (TRANSIDYN control devices), i. e. regulator, operational amplifier and phase shifter for mercury-arc rectifier or SCR, etc., which should be used in place of old magnetic amplifiers.

As the TRANSIDYN regulator has a complete PI or PID characteristic because of rapid response and high gain property of transistor, it is easy to obtain the optimum characteristic of any control system.

In this paper, we relate the method for the mathematical calculation of optimum adjusting for general control system.

I. まえがき

自動制御系の最適化という問題は制御理論の最もむずかしい問題で，調節器の PID 特性を設定するための手法として，従来種々の手法が用いられているが，最も多く用いられているのは，ボード線図による手法である。

この方法は複雑な数学的手法を用いることなく，結果が直視的に掌握できるので非常に有利な方法ということができる．特に制御対象の特性を設計段階において正確に掌握できず，実際の装置の試験時にカットアンドトライによって最適化を図ろうとする場合には特に有利な方法である。

今回開発されたトランジダイン制御方式とは，トランジスタ化された調節器，演算器などを用いて構成される制御方式の総称であり，各調節器は従来の磁気増幅器のようにそれ自身の時間遅れが問題となることもなく，また増幅度もはるかに高いので，ほぼ完全な PID 調節器と考えることができる．したがってかかる調節器を用いて構成された自動制御系は，その制御対象となる各機器の特性の多少の変化は制御系の大きなループゲインのために，ほとんど問題なく補償され，動特性ならびに静特性の計画値と実際の結果とがよく一致することになり，設計段階における理論的解析が容易に行なえるようになった。

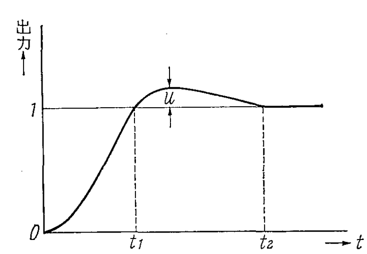
以下最適化の数学的手法による一方法を述べ，その結果として調節器の PID 定数を決定するための簡単な計算式を導出しようと思う．この計算式によればボード線図によることなく直ちに PID 調節器の最適値が決定できるわけである。

* 電機技術部
** 東京工場

解析のはじめに制御対象に含まれる各種時間遅れに，小さい時間遅れと，大きい時間遅れの概念を導入して考察を進めることにする．たとえば水銀整流器の点弧時のむだ時間などは小さい時間遅れに属するもので，直流電動機の電機子回路の時定数，界磁の時定数などは大きな時間遅れに属するものである。

II. 制御系の指令値変化に対する最適化

一般に入力指令値のインディシャル変化に対する制御量の応答は第1図のような形状をもつ．ここに u はゆき過ぎ量，t_1 は立ち上り時間，t_2 は整定時間である．制御系の調節に当たってはいかなる種類の外乱に対しても指令値と実際値とができるだけ広く一致していることが要求される．すなわち指令値のインディシャル変化によって生ずる制御量の偏差がより急速に，より正確に除去されるほど制御系の動特性は良好なものということができる．この良好な動特性の要求を満たすために，線形偏差面積あるいは2乗偏差面積を最小にするような条件によって，いわゆる線形最適調整，2乗最適調整をうる．これらの最適調整は一般に強過ぎたり，あるいは弱過ぎる制動効果を与えることはよく知られていることである．これに対し最適の制御系は



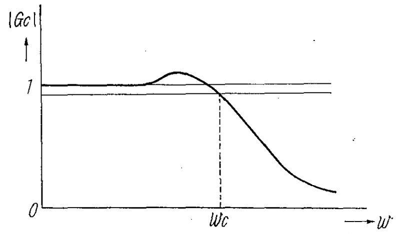
第1図 インディシャル応答の一般波形
Fig. 1. Normal form of inditial response

1） ゆき過ぎ量uは5％以内にあること

2） 時間t_1，t_2ができるだけ小さいこと

の条件を満たしたものであるといえる。

一般の制御系の閉ループ周波数伝達関数$G_c(j\omega)$の周波数ωに対する絶対値の変化は，制御系中に含まれる遅延要素のために，第2図に示すように周波数が増大するほど減少し，かつ指令値の高周波擾乱に対しては，この系の共振による出力増大のために$|G_c(j\omega)|>1$となる周波数が存在する。



第2図 $|G_c|$ の周波数特性

Fig. 2. Frequency characteristic of $|G_c|$

したがって，最適の制御系を作るためには，この$|G_c(j\omega)|$の値が近似的に1に近い値をとる周波数帯域をできるだけ拡げて，しゃ断周波数ω_cをできるだけ大きくしなければならず，またできるだけ水平線1に密着していることがその条件となる。

すなわち

$$|G_c(j\omega)|\fallingdotseq 1 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{d^n|G_c(j\omega)|}{d\omega^n}\fallingdotseq 0 \quad (n=1,2,\cdots\cdots) \quad\cdots\cdots(2)$$

がその条件式となる。

いま$G_c(j\omega)$の共軛関数を$G_c(-j\omega)$とすると，

$$|G_c(j\omega)|^2=G_c(j\omega)\cdot G_c(-j\omega) \quad\cdots\cdots(3)$$

となる。

式(3)においてωを$-\omega$に置き換えても$|G_c(j\omega)|^2$の値は変わらないので式(3)はω^2の関数となり

$$|G_c(j\omega)|^2=H(\omega^2)=H(x) \quad\cdots\cdots(4)$$

と書き表わすことができる。

したがって式(1)，(2)は下記のように表わされる。

$$H(x)\fallingdotseq 1 \quad\cdots\cdots(5)$$

$$\frac{d^n H(x)}{dx^n}\fallingdotseq 0 \quad (n=1,2,\cdots\cdots) \quad\cdots\cdots(6)$$

$H(x)$の一般形は

$$H(x)=\frac{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots}{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots}=\frac{P(x)}{Q(x)} \cdots\cdots(7)$$

で表わされる。

この$H(x)$について式(6)の$n=1$の場合が成り立つためには，

$$\frac{P'(x)\cdot Q(x)-P(x)\cdot Q'(x)}{\{Q(x)\}^2}=0 \quad\cdots\cdots(8)$$

となるので，この条件を満たすための必要充分条件は，

$P'(x)=Q'(x)=0$ なることである。

すなわち

$$P'(x)=b_1+2b_2x+3b_3x^2+\cdots\cdots(9)$$

$$Q'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots\cdots(10)$$

であるのでxのいかんにかかわらず式(6)が成り立つためには

$$a_1=b_1=0$$

となることがその一つの条件である。

同様に式(6)の$n=2$の場合を考えると

$$\frac{P''(x)\cdot Q(x)-P(x)\cdot Q''(x)}{\{Q(x)\}^2}=0 \quad\cdots\cdots(11)$$

となるべきことから

$$P''(x)=2b_2+6b_3x+\cdots\cdots=0 \quad\cdots\cdots(12)$$

$$Q''(x)=2a_2+6a_3x+\cdots\cdots=0 \quad\cdots\cdots(13)$$

$$\therefore\quad a_2=b_2=0$$

となる。

同様の手法により$H(x)$の最適条件としては

$$a_1=a_2=a_3=\cdots\cdots=0 \quad\cdots\cdots(14)$$

$$b_1=b_2=b_3=\cdots\cdots=0 \quad\cdots\cdots(15)$$

が求むる条件となる。

上記より求められた最適条件を他の調整条件，すなわち前に述べた線形最適調整と，2乗最適調整と比較してみよう。

いま一例として下記の閉ループ伝達関数を採りあげて考える。

$$G_c(p)=\frac{1}{1+ap+p^2} \quad\cdots\cdots(16)$$

式(16)はまた下記のように表わすこともできる。

$$G_c(p)=\frac{1}{(p+p_1)(p+p_2)} \quad\cdots\cdots(17)$$

$$p_1,p_2=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-1} \quad\cdots\cdots(18)$$

この系の時間tに対するインディシャル応答は

$$f(t)=1-\frac{1}{p_1-p_2}(p_1e^{-p_2t}-p_2e^{-p_1t}) \quad\cdots\cdots(19)$$

となる。

1） 線形最適調整

式(17)の分母の零点p_1，p_2が等しいことがこの条件である．ゆえに式(18)より

$$\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}=0 \quad\cdots\cdots(20)$$

$$\therefore \quad a=2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

すなわち式(16)の G_c の制動係数 $\zeta=1$ である。

2) 2乗最適調整

式(19)の $f(t)$ についての偏差の2乗面積ができる限り小さくなることがこの条件であり

$$\int_0^\infty [1-f(t)]^2\,dt=\text{最小} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

この式を解くと

$$\frac{a^2+1}{2a}=\text{最小} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

が求むる条件となり，その結果

$$a=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

すなわち制動係数 $\zeta=\dfrac{1}{2}$ となる。

これに対し式(14)の条件より求めた最適調整法では，

$$H(x)=\frac{1}{1+(2-a^2)x+x^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

より，式(14)の条件から

$$a=\sqrt{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

すなわち制動係数は $\zeta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ が得られる。

線形最適調整の場合は $f(t)$ は全くゆき過ぎを示さないゆるやかな応答を示し，逆に2乗最適調整では約16%のゆき過ぎ量を示すことになる．すなわち本節でのべた最適調整による動作特性は制動係数が線形最適調整と2乗最適調整との中間にあり，ゆき過ぎ量約4%の良好な応答特性を示すことになる。

1. *m*個の小さい時定数と1個の大きい時定数を有する制御対象に対する調節器最適定数の決定法

m 個の小さい時定数 $t\mu$ （$\mu=1, 2\cdots\cdots m$）と一つの大きい時定数 T を有し，かつ増幅度 V なる制御対象の伝達関数は下式で表わされる。

$$G_S(j\omega)=\frac{V}{(1+j\omega T)\prod_1^m(1+j\omega t_\mu)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

これに対する PI 調節器の伝達関数を

$$G_R(j\omega)=\frac{(1+j\omega\tau)}{j\omega T_i} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

とし，G_S の大きな時定数 $j\omega T$ の影響を G_R の $j\omega\tau$ で完全に補償するために $\tau=T$ とすると，制御系の開ループ周波数伝達関数 $G_0(j\omega)$ は

$$G_0(j\omega)=G_R(j\omega)\cdot G_S(j\omega)$$

$$=\frac{V}{j\omega T_i\prod_1^m(1+j\omega t_\mu)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

となる。

ここで小さい時定数の伝達関数の積 $\prod_1^m(1+j\omega t_\mu)$ について考えてみよう。

$$\prod_1^m(1+j\omega t_\mu)=1+j\omega\sum_1^m t_\mu+\sum_2^m(j\omega)^\nu K^\nu \quad \cdots\cdots(30)$$

式(30)においては明らかに $K^\nu<(\Sigma t_\mu)^\nu$ なる関係がある．また制御系のしゃ断周波数 ω_c 付近の周波数では

$$\omega_c<\frac{1}{\Sigma t_\mu}$$

すなわち，$\omega_c\Sigma t_\mu<1$ であるから

$$\Sigma(j\omega_c)^\nu\cdot K^\nu<\Sigma(j\omega_c\,\Sigma t_\mu)^\nu\ll 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

となり，式(30)は近似的に

$$\prod_1^m(1+j\omega t_\mu)\doteqdot 1+j\omega\sum_1^m t_\mu \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

で表わすことができる。

式(32)を式(29)に代入すると

$$G_0(j\omega)=\frac{V}{j\omega T_i(1+j\omega\sum_1^m t_\mu)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

となり，その閉ループ周波数伝達関数は

$$G_c(j\omega)=\frac{V}{(V-\omega^2T_i\sum_1^m t_\mu)+j\omega T_i} \cdots\cdots\cdots(34)$$

となる。

この場合の $G_c(j\omega)$ の絶対値関数 $H(x)$ は

$$H(x)=\frac{V^2}{V^2+(T_i-2V\sum_1^m t_\mu)T_ix+T_i^2(\Sigma t_\mu)^2x^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

となるので式(14)の条件より，その最適条件として

$$T_i=2V\sum_1^m t_\mu \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(36)$$

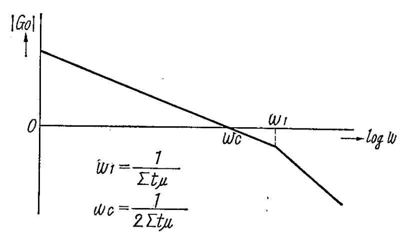
が導かれる。

すなわち

$$\tau=T \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(37)$$

$$T_i=2V\sum_1^m t_\mu \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(38)$$

が制御対象 G_S に対する調節器の最適調整定数となる。



第3図 式(33)のボード線図

Fig. 3. Bode diagram for eq. (33)

上記の制御系の開ループ周波数特性をボード線図で表わすと第3図のようになり，

しゃ断周波数　$\omega_c=\frac{1}{2}\sum_1^m t_\mu$

制 動 係 数　$\zeta=\frac{1}{\sqrt{2}}=0.707$

となっていることがわかる。

式(38)の条件を式(34)に代入すると

$$G_c(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega\,2\sum_1^m t_\mu+(j\omega)^2\cdot 2\left(\sum_1^m t_\mu\right)^2}\quad\cdots(39)$$

となる．この伝達関数のインディシャル応答は

$$f(t)=1-e^{-\frac{1}{2\Sigma t_\mu}}\left(\cos\frac{t}{2\Sigma t_\mu}+\sin\frac{t}{2\Sigma t_\mu}\right)\cdots(40)$$

となることは明らかで式(40)より

ゆき過ぎ量　$u\doteqdot 4\%$

立ち上り時間　$t_1\doteqdot 4.7\,\Sigma t_\mu$

整 定 時 間　$t_2\doteqdot 10\,\Sigma t_\mu$

となることが確められる。

2. m個の小さい時定数と2個の大きい時定数を有する制御対象に対する調節器最適定数の決定

m 個の小さい時定数 $t_\mu\,(\mu=1,2,\cdots\cdots m)$ と二つの大きい時定数 T_1, T_2 を有し，かつ増幅度 V なる制御対象の伝達関数は次式で表わされる。

$$G_S(j\omega)=\frac{V}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)\prod_1^m(1+j\omega t_\mu)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(41)$$

これに対する PID 調節器の伝達関数を

$$G_R(j\omega)=\frac{(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)}{j\omega T_i}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(42)$$

で表わし，$\tau_1=T_1$, $\tau_2=T_2$ と選ぶ。

この場合は制御系の開ループ伝達関数 $G_0(j\omega)$ は

$$G_0(j\omega)=\frac{V}{j\omega T_i\prod_1^m(1+j\omega t_\mu)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(43)$$

となり，この式は前記式(29)と一致するので，この最適化条件としては

$$\tau_1=T_1\cdots\cdots\cdots\cdots(44)$$

$$\tau_2=T_2\cdots\cdots\cdots\cdots(45)$$

$$T_i=2V\sum_1^m t_\mu\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(46)$$

であることは直ちに推定できる。

この場合の過渡応答の特性も式(40)で表わされた形となることは明らかである。

III. 制御対象の入力側への外乱に対する最適化

前節では閉ループの入力指令に対する最適化の条件を求めたが，本節では制御系の内部外乱，すなわち制御対象の入力側に加えられる外乱に対する最適化を考えてみよう。

制御対象の入力側への外乱に対する閉ループ周波数伝達関数は

$$G_d(j\omega)=\frac{G_c(j\omega)}{G_R(j\omega)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(47)$$

となる．PI 調節器の場合は

$$\frac{1}{G_R(j\omega)}=\frac{j\omega T_i}{(1+j\omega\tau)}\cdots\cdots\cdots\cdots(48)$$

となることは式(28)より明らかである．式(48)における調節器の時定数 τ が式(47)の閉ループ特性の外乱による擾乱の継続時間を決定すると考えられるので，前節でのべたように $\tau=T$ と設定すれば外乱に基づく制御量の擾乱の継続時間が相当長くなる．したがってこのような外乱に対する最適化の条件は自から指令値変化に対するそれと変えなければならない．すなわち $\tau<T$ と選べば負荷外乱に対して良好な擾乱の回復特性をもった制御系を構成することができる。

いま n 個の大きい時定数 $T_\nu\,(\nu=1,2,\cdots\cdots n)$ と m 個の小さい時定数 $t_\mu\,(\mu=1,2,\cdots\cdots m)$ よりなり，かつ増幅度 V を有する制御対象を考えると，その伝達関数は

$$G_S(j\omega)=\frac{V}{\prod_1^n(1+j\omega T_\nu)\prod_1^m(1+j\omega t_\mu)}\cdots\cdots\cdots(49)$$

となる．これを補償すべき調節器の伝達関数を

$$G_R=\frac{\prod_1^n(1+j\omega\tau_\nu)}{j\omega T_i'}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(50)$$

とすると，この系の過渡応答特性を論ずる際に問題となるしゃ断周波数 ω_c は一般に $1/T_\nu$ より相当高い点となるので，問題とすべき周波数帯域では $j\omega T_\nu\gg 1$ となり

$$\frac{1}{(1+j\omega T_\nu)}\doteqdot\frac{1}{j\omega T_\nu}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(51)$$

と近似することができる。

したがって開ループ周波数特性 $G_0(j\omega)$ は式(49)(50)より，式(51)の条件を加えるとと

$$G_0(j\omega)$$

$$=\frac{V\prod_1^n(1+j\omega\tau_\nu)}{j\omega T_i'\cdot(j\omega)^n\prod_1^n T_\nu\cdot\prod_1^m(1+j\omega t_\mu)}\cdots\cdots(52)$$

$$G_0(j\omega) = \prod_1^n \frac{(1+j\omega\tau_\nu)}{j\omega\tau_\nu} \cdot \frac{V \prod_1^n \tau_\nu}{j\omega T_i' \prod_1^n T_\nu} \cdot \frac{1}{\prod_1^m (1+j\omega t_\mu)} \quad \cdots\cdots (53)$$

となる。

$$\frac{V \prod_1^n \tau_\nu}{T_i' \prod_1^n T_\nu} = \frac{1}{T_i} \quad \cdots\cdots (54)$$

と置くと式(53)は

$$G_0(j\omega) = \prod_1^n \frac{1+j\omega\tau_\nu}{j\omega\tau_\nu} \cdot \frac{1}{j\omega T_i} \cdot \frac{1}{\prod_1^m (1+j\omega t_\mu)} \quad \cdots\cdots (55)$$

として表わすことができる。

1. 小さい時定数と T_i との関係

式(49)において大きい時定数の個数 $n=0$ とすると

$$G_0(j\omega) = \frac{1}{j\omega T_i \prod_1^m (1+j\omega t_\mu)} \quad \cdots\cdots (56)$$

ただしここで　$T_i = \frac{T_i'}{V}$

式(56)より閉ループ周波数伝関数を求めると

$$G_c(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T_i \prod_1^m (1+j\omega t_\mu)} \quad \cdots\cdots (57)$$

となる。

式(57)の分母をべき級数展開すると

$$G_c(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T_i - \omega^2 T_i \sum_1^m t_\mu - j\omega^3 \cdots\cdots} \quad \cdots\cdots (58)$$

となる. この $G_c(j\omega)$ の共軛関数 $G_c(-j\omega)$ は

$$G_c(-j\omega) = \frac{1}{1-j\omega T_i - \omega^2 T_i \sum_1^m t_\mu + j\omega^3}$$

$$\therefore \quad H(x) = \frac{1}{1+x(T_i^2 - 2T_i \sum_1^m t_\mu) + \cdots\cdots} \quad \cdots\cdots (59)$$

ここで x の係数を 0 とおくと T_i 決定の条件が得られる。

すなわち

$$T_i = 2\sum_1^m t_\mu \quad \cdots\cdots (60)$$

2. 大きい時定数と T_i との関係

1) 可 逆 定 理

一つの閉ループ伝達関数の過渡応答はその分母多項式の零点によって決定されることは衆知のことがらである. いま一つの開ループ周波数伝達関数 $G_0(p)$ を考え, その分子多項式を $Z(p)$, 分母多項式を $N(p)$ とすれば $G_0(p)$ は次式で表わされる。

$$G_0(p) = \frac{Z(p)}{N(p)} \quad \cdots\cdots (61)$$

これに対応する閉ループ周波数伝達関数 $G_c(p)$ は次式のようになる。

$$G_c(p) = \frac{G_0(p)}{1+G_0(p)} \quad \cdots\cdots (62)$$

$$G_c(p) = \frac{Z(p)}{Z(p)+N(p)} \quad \cdots\cdots (63)$$

すなわち $G_c(p)$ の分母多項式は $Z(p)$ と $N(p)$ との和となるので, もとの $G_0(p)$ が最適化された伝達関数であれば, その最適化条件を侵すことなく $N(p)$ と $Z(p)$ の交換を行なうことができる. すなわち最適化された周波数伝達関数を $G_0(p)$ とすると, 逆周波数伝達関数

$$G_0'(p) = \frac{1}{G_0(p)} \quad \cdots\cdots (64)$$

もまた最適化の法則を満足している。

$G_0'(p)$ に対する閉ループ周波数伝達関数は

$$G_c'(p) = \frac{G_0'(p)}{1+G_0'(p)} = \frac{1}{1+G_0(p)} \quad \cdots\cdots (65)$$

である. 式(62)と比較すると

$$G_c'(p) = 1 - G_c(p) \quad \cdots\cdots (66)$$

となることがわかる。

すなわち $G_c'(p)$ は $G_c(p)$ がローパス特性であればハイパス特性を示すことになりローパス特性をもった元来の制御回路に対する最適化の条件は式(66)におけるハイパスの回路にも適用されることを意味している。

2) 変 換 定 理

閉ループ伝達関数の過渡応答の減衰特性は, 分母多項式の零点の実数部と虚数部との関係によって決まる. このことを念頭において, いま一つの閉ループ周波数伝達関数 $G_c(p)$ の変数 p の代りに $1/p$ を導入してみよう。

このときの新らしい伝達関数を $\tilde{G}_c(p)$ とすると

$$\tilde{G}_c(p) = G_c\left(\frac{1}{p}\right) \quad \cdots\cdots (67)$$

である. この $\tilde{G}_c(p)$ の分母多項式の零点の実数部と虚数部の比は, $G_c(p)$ のそれと一致するので減衰特性は変らない。

すなわち最適化された周波数伝達関数を $G_0(p)$ とすると $\tilde{G}_0(p)$ もまた最適化の条件を満足することがいえる。

この定理も前記の可逆定理と同様にローパス特性から

ハイパス特性への移動を最適化の条件を侵さずに行なえる。

3) 鏡 像 定 理

前記の可逆定理および変換定理を組み合わせて一つの新しい伝達関数を考える．すなわち最適化された周波数伝達関数を $G_0(p)$ とすると新しい関数

$$G_0^*(p)=\frac{1}{G_0\left(\frac{1}{p}\right)} \quad \cdots\cdots(68)$$

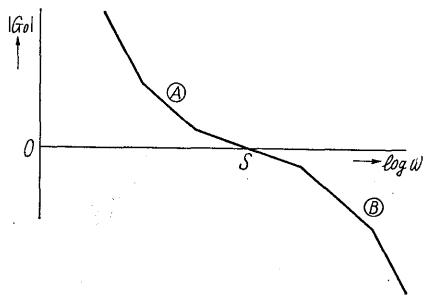
もまた最適化の条件を満足する。

これに対応する閉ループ周波数伝達関数 $G_c^*(p)$ は

$$G_c^*(p)=1-G_c\left(\frac{1}{p}\right) \quad \cdots\cdots(69)$$

式(69)による $G_c^*(p)$ の特性は元来のローパス特性の $G_c(p)$ から一たん $G_c(1/p)$ のハイパス特性に変換されさらに新しいローパス特性に戻されていることがわかる。

この鏡像定理の実際的な意味は，一つの伝達関数の特性を検討するさいに，その最適化の条件から，直ちに第2のグループの最適化の条件を求めることができることである．さらにわかりやすくするために一つの周波数伝達関数 $G_0(j\omega)$ を考えて，これに対する $G_0^*(j\omega)$ をボード線図に結びつけて考えるとよい．$G_0(j\omega)$ のボード線図を第4図に示すようなものとすれば，$G_0^*(j\omega)$ のボート線図は $G_0(j\omega)$ のそれをゲイン交点 S のまわりに $180°$ 回転させた形となる．すなわち S 点より低周波側にある枝 A と高周波側にある枝 B とを交換したことに相当する．ただし S 点の $\omega=1$ でない限り $G_0^*(j\omega)$ の S 点は $G_0(j\omega)$ の S 点より左右に移動するがこれは本質的な問題ではない．ナイキストの理論によれば閉ループ特性の減衰特性は S 点における位相のずれによって決定されることになり，この位相のずれは枝 A および B の傾斜に関係することが示されているので $G_0(j\omega)$ による $G_c(j\omega)$ が安定な限り $G_c^*(j\omega)$ は安定な特性を示すことが考えられる．以上が鏡像定理と称する法則である。この定理を利用して以下大きい時定数と T_i の関係を考察することにする。



第4図 $|G_0|$ のボード線図

Fig. 4. Bode diagram of $|G_0|$

式(55)において小さい時定数の個数 $m=0$ とすれば，

$$G_0(j\omega)=\frac{1}{j\omega T_i}\prod_1^n\frac{1+j\omega\tau_\nu}{j\omega\tau_\nu} \quad \cdots\cdots(70)$$

$$\therefore\ G_0^*(j\omega)=\frac{1}{j\omega\frac{1}{T_i}\cdot\prod_1^n\left(1+j\omega\frac{1}{\tau_\nu}\right)} \quad \cdots\cdots(71)$$

となる。

式(71)を前記式(56)と比較すれば，式(56)の T_i の代りに $1/T_i$，t_μ の代りに $1/\tau_\nu$ となっているので，$G_0^*(j\omega)$ の最適化の条件としては式(60)と対応させて

$$\frac{1}{T_i}=2\sum_1^n\frac{1}{\tau_\nu} \quad \cdots\cdots(72)$$

なる条件が得られる。

また式(70)の閉ループ周波数伝達関数 $G_c(j\omega)$ は

$$G_c(j\omega)=\frac{\prod_1^n(1+j\omega\tau_\nu)}{\prod_1^n(1+j\omega\tau_\nu)+(j\omega)^{n+1}T_i\prod_1^n\tau_\nu} \quad \cdots\cdots(73)$$

であるが，この分母多項式の $(j\omega)^1$ の係数によって与えられる部分過程の総おくれを最小にすることが別の最適化の条件となる．すなわち $\sum_1^n\tau_\nu$ を最小にすることがその条件である。

式(72)のように τ_ν の逆数の和が定められた場合に，$\sum_1^n\tau_\nu$ を最小にするためには，$\tau_\nu=\tau$ であることが必要である．したがって式(72)と比較して $\tau=2nT_i$ なる関係が導出される。

すなわち最適化の条件は下記のようになる。

$$T_i=2\sum_1^m t_\mu \quad \cdots\cdots(74)$$

$$\tau=2n\,T_i=4n\sum_1^m t_\mu \quad \cdots\cdots(75)$$

$$T_i'=\frac{T_i V\prod_1^n\tau_\nu}{\prod_1^n T_\nu}=\frac{2V\sum_1^m t_\mu\prod_1^n\tau_\nu}{\prod_1^n T_\nu} \quad \cdots\cdots(76)$$

3. 1個の大きい時定数と，m 個の小さい時定数を有する制御対象に対する調節器最適定数の決定法

この場合の制御対象の周波数伝達関数は

$$G_S=\frac{V}{(1+j\omega T)\prod_1^m(1+j\omega t_\mu)} \quad \cdots\cdots(77)$$

またこれに対する PI 調節器の周波数伝達関数を

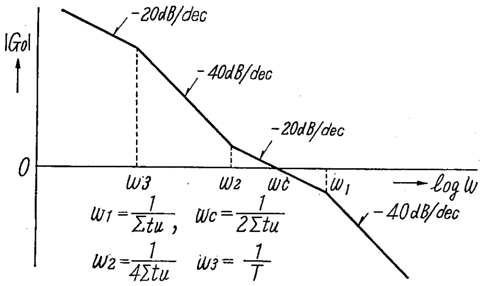
$$G_R=\frac{(1+j\omega\tau)}{j\omega T_i'} \quad \cdots\cdots(78)$$

とし，これに前記の最適条件式(75)，式(76)を適用すると

$$\tau=4\sum_{1}^{m}t_\mu \qquad \cdots\cdots(79)$$

$$T_i'=\frac{2V\tau\sum_{1}^{m}t_\mu}{T}=\frac{8V\left(\sum_{1}^{m}t_\mu\right)^2}{T} \qquad \cdots\cdots(80)$$

が求める最適化条件となる．これをボード線図で表わすと第5図のようになる。



第5図　式(77), (78) の ボ ー ド 線 図

Fig. 5. Bode diagram for eq. (77) and (78)

また式(55)より得られる開ループ周波数伝達関数は

$$G_0 \fallingdotseq \frac{1+j\omega\,4\sum_{1}^{m}t_\mu}{8\left(j\omega\sum_{1}^{m}t_\mu\right)^2\prod_{1}^{m}(1+j\omega\,t_\mu)} \qquad \cdots\cdots(81)$$

となり，閉ループ周波数伝達関数は

$$G_c=\frac{1+j\omega\,4\sum_{1}^{m}t_\mu}{1+\omega\,4\sum_{1}^{m}t_\mu-\omega^2\,8\left(\sum_{1}^{m}t_\mu\right)^2\prod_{1}^{m}(1+j\omega\,t_\mu)} \qquad \cdots\cdots(82)$$

となる。

4. 2個の大きい時定数と，m 個の小さい時定数を有する制御対象に対する調節器最適定数の決定法

制御対象および PID 調節器の周波数伝達関数を

$$G_S=\frac{V}{(1+j\omega\,T_1)(1+j\omega\,T_2)\prod_{1}^{m}(1+j\omega\,t_\mu)} \qquad \cdots(83)$$

$$G_R=\frac{(1+j\omega\,\tau_1)(1+j\omega\,\tau_2)}{j\omega\,T_i'} \qquad \cdots\cdots(84)$$

とすると，この最適化条件は次式のようになる。

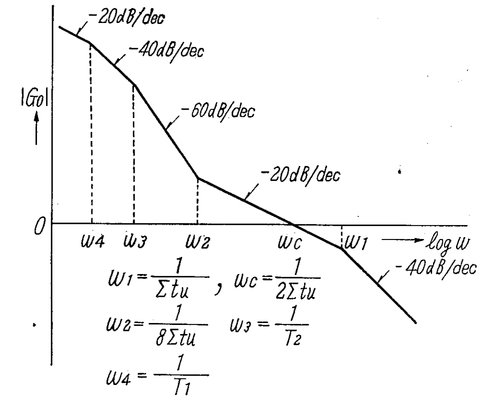
$$\tau_1=\tau_2=8\sum_{1}^{m}t_\mu \qquad \cdots\cdots(85)$$

$$T_i'=\frac{128V\,(\Sigma t_\mu)^3}{T_1\,T_2} \qquad \cdots\cdots(86)$$

この場合のボード線図は第6図のようになる。

式(55)より得られる開ループ周波数伝達関数は

$$G_0=\frac{\left(1+j\omega\,8\sum_{1}^{m}t_\mu\right)^2}{128\left(j\omega\sum_{1}^{m}t_\mu\right)^3\prod_{1}^{m}(1+j\omega\,t_\mu)} \qquad \cdots\cdots(87)$$



第6図　式(83), (84) の ボ ー ド 線 図

Fig. 6. Bode diagram for eq. (83) and (84)

となり，閉ループ周波数伝達関数は

$$G_c=\frac{\left(1+j\omega\,8\sum_{1}^{m}t_\mu\right)^2}{1+j\omega\,16\sum_{1}^{m}t_\mu-\omega^2\cdot 64\left(\sum_{1}^{m}t_\mu\right)^2-j\omega^3\cdot 128\left(\sum_{1}^{m}t_\mu\right)^3\prod_{1}^{m}(1+j\omega\,t_\mu)} \qquad \cdots\cdots(88)$$

となる。

5. 時間的応答

式(82)の G_c の特性を解析すると入力シグナルのインディシャル応答の特性は

ゆき過ぎ量　$u \fallingdotseq 43\,\%$

立ち上り時間　$t_1 \fallingdotseq 3.1\sum_{1}^{m}t_\mu$

整定時間　$t_2 \fallingdotseq 11\sum_{1}^{m}t_\mu$

となる。

式(82)の分母多項式は

$$\begin{aligned}Q&=1+j\omega\,4\sum_{1}^{m}t_\mu-\omega^2\,8\left(\sum_{1}^{m}t_\mu\right)^2\prod_{1}^{m}(1+j\omega\,t_\mu)\\&=1+j\omega\,4\sum_{1}^{m}t_\mu\left[1+j\omega\,2\sum_{1}^{m}t_\mu\prod_{1}^{m}(1+j\omega\,t_\mu)\right]\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(89)$$

となる。

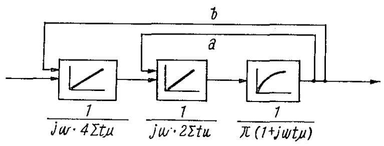
ここで，

$$\begin{aligned}&1+j\omega\,2\sum_{1}^{m}t_\mu\prod_{1}^{m}(1+j\omega\,t_\mu)\\&\fallingdotseq 1+j\omega\cdot 2\sum_{1}^{m}t_\mu-\omega^2\,2\left(\sum_{1}^{m}t_\mu\right)^2=N_a\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(90)$$

とおくと式(89)は

$$Q=1+j\omega\,4\,\Sigma\,t_\mu\cdot N_a \qquad \cdots\cdots(91)$$

となる．式(90)の条件は制動係数 $\xi=1/\sqrt{2}=0.707$ の減衰特性を示し，これは入力指令のインディシャル応答のゆき過ぎ量が4％の応答を示すものである。



第7図　多重ループ系
Fig. 7.　Multiple loop system

式(89)，(90)は近似的に第7図に示す多重ループを有する系の閉ループ特性を示す特性式である。

第7図においてマイナループ a の閉ループ特性は I 調節器 $1/j\omega\, 2\sum_1^m t_\mu$ によって補償され，総おくれ $2\sum_1^m t_\mu$ を有するものであると考えると，閉ループ b の特性は第2の I 調節器 $1/j\omega\, 4\sum_1^m t_\mu$ を直列接続することにより入力値に対して行き過ぎ量 4 %の過度応答を示す最適化を行なうことができる．したがって式(82)のインディシャル応答において 43% のゆき過ぎ量を生ずるのは，分母多項式の減衰特性によるものではなく，分子多項式 $P=1+j\omega\, 4\sum_1^m t_\mu$ の位相進み特性によるものと考えることができる．したがってこの P の微分効果の影響を除去するためには，$4\sum_1^m t_\mu$，すなわち τ と同一の時定数の一次遅れを有する一次遅れフイルタを通して入力指令値を加えるようにすれば，入力指令値のインディシヤル応答は，ゆき過ぎ量 4 %の応答を示すことになるとともに，負荷外乱に対しては回復の早い応答が得られることになる。

次に式(89)に対する上記の関係を考えてみる。

式(89)の分母多項式は

$$Q=1+16\sum_1^m t_\mu\left[1+4\sum_1^m t_\mu\left\{1+2\sum t_\mu\times\left(1+j\omega\sum_1^m t_\mu\right)\right\}\right] \cdots\cdots\cdots(92)$$

となりこの式による入力指令値のインディシャル応答は前記式(89)の場合と同様，ゆき過ぎ量 4 %の応答を示すことになる。

次に分子多項式 $(1+j\omega\, 8\sum_1^m t_\mu)^2$ を考えてみる。

しゃ断周波数 ω_c 付近では $\omega_c\, 8\sum_1^m t_\mu>1$ なる関係があるので，鏡像定理から

$$(1+j\omega\, 8\sum_1^m t_\mu)^2 \doteqdot (1+j\omega\, 4\sum_1^m t_\mu) \cdots\cdots\cdots(93)$$

と近似することができるので，式(89)のインディシャル応答は式(82)のそれとほぼ類似の特性を示すことがわかる．したがって入力指令値に対する補償フィルタとしてはやはり，$4\sum_1^m t_\mu$ の時定数を有する一次遅れフィルタをそう入すればよい。

第1表は上記最適化の条件をまとめて表示したものである。

IV.　多重ループシステム

多重ループシステムとは，制御対象に多くの時間遅れ要素が存存する場合に，その一つあるいは二つずつを一つの PI あるいは PID 調節器を以てマイナループを作り，マイナループの閉ループ特性を上記の最適化の条件を用いて最適化し，それ自身の周波数特性を改善する方式である．すなわち最も内側のマイナループの最適化により新たに得られる総時間遅れをその外側の制御ループに対する小さい時定数と考えて，外側ループの調節器の最適化を図ることにより系全体の最適化を容易に行なうことができる。

この多重ループシステムの実例は別の論文の応用例を参照願えれば充分理解願えるものと思う。

また一つのマイナループの外側のループの指令値，す

第1表　最適化条件の表
Table 1.　List of optimum adjusting

制御対象 $G_S(j\omega)$	調節器 $G_R(j\omega)$	入力指令に対する最適条件	外乱に対する最適条件
$\dfrac{V}{(1+j\omega T)\prod_1^m(1+j\omega t_\mu)}$	$\dfrac{1+j\omega\tau}{j\omega T_i'}$	$\tau=T$ $T_i'=2V\sum_1^m t_\mu$	$\tau=4\sum_1^m t_\mu$ $T_i'=8V\dfrac{\left(\sum_1^m t_\mu\right)^2}{T}$ $T>\tau$
$\dfrac{V}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)\prod_1^m(1+j\omega t_\mu)}$	$\dfrac{(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)}{j\omega T_i'}$	$\tau_1=T_1$ $\tau_2=T_2$ $T_i'=2V\sum_1^m t_\mu$	$\tau_1=\tau_2=8\sum_1^m t_\mu$ $T_i'=128V\dfrac{\left(\sum_1^m t_\mu\right)^3}{T_1T_2}$

なわち外側ループの調節器の出力に制限効果を持たせることにより，マイナループ制御量のリミット作用が容易に行なえるという利点もある。

V. 調節器の特性

閉ループ特性の最適制御状態を得るための開ループ特性は前述された．これを書き換えて

$$G_0=\left(\frac{1+ST_a}{ST_a}\right)^n \frac{1}{ST_c}\ \frac{1}{1+ST_\mu} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(94)$$

ここで T_c はしゃ断周波数 ω_c の逆数，T_μ は小時定数群の和 Σt_μ である．また開ループ特性式(94)を得るための調節器の特性は式(95)で表わされる．ここで T_I は積分時間，T_{Di} は微分時間，P は調節器の比例帯を示す。

$$G_R=\frac{(1+ST_I)\prod_{i=0}^{z}(1+ST_{Di})}{ST_IP} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(95)$$

今調節器が線形帰還演算要素で構成されているとすると，その入出力の伝達特性は式(96)で表わされる。

$$G_R=\frac{C_0+SC_1+S^2C_2+\cdots\cdots+S^kC_k}{d_0+Sd_1+S^2d_2+\cdots\cdots+S^ld_l}$$
$$=K_R\frac{1+SC_1'+S^2C_2'+\cdots\cdots+S^kC_k'}{1+Sd_1'(1+Sd_2'+\cdots\cdots+S^{l-1}d_l')}$$
$$k<l \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(96)$$

式(96)は２因数に分解して，$G_R \doteqdot G_{R1}\cdot G_{R2}$ と表わすことができる．G_{R2} は遅れ項の伝達特性である。

$$G_{R1}=K_R\frac{1+SC_1'+S^2C_2'+\cdots\cdots+S^kC'_k}{1+Sd_1''} \quad \cdots(97)$$

$$G_{R2}=\frac{1}{1+Sd_2''+\cdots\cdots+S^{l-1}d_l''} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(98)$$

G_{R1} が今求める調節器の伝達特性であるとすると，G_{R2} は式(94)の $1/(1+ST_\mu)$ に対して無視できる必要がある．G_{R2} を近似的に

$$G_{R2}\doteqdot\frac{1}{(1+ST_{CR})} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(99)$$

と表わした時 T_{CR} は調節器のしゃ断周波数の逆数に匹敵する．このようにすると $G_R \doteqdot G_{R1}$ とみることができる。

制御系の静特性におけるオフセット量を零にするためには式(96)の K_R は無限に大きな増幅度をもたなければならない．そうすると式(97)が正規の動作を行なうためには分母は大きな一次遅れ項を形成する必要がある．今 $d_1''=K_I\,T_I$ とすると K_I は積分感度を意味する．すなわち

$$d_1''=K_I\,T_I=K_R\,T_I\,P \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(100)$$

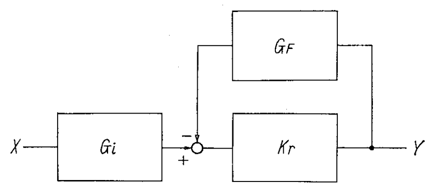
式(100)を式(97)に代入し d_1'' が無限に大きな値をもつとすると大時定数の積分効果により式(97)は次式に書き換えられる。

$$G_{R1}=\frac{1+SC_1'+S^2C_2'+\cdots\cdots+S^kC'_k}{ST_IP} \quad \cdots(101)$$

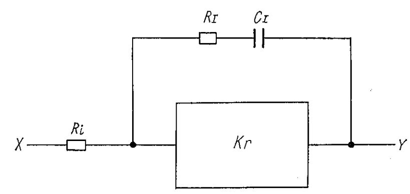
したがって式(95)，(101)から

$$1+SC_1'+S^2C_2'+\cdots\cdots+S^kC_k'$$
$$\doteqdot(1+ST_I)\prod_i(1+ST_{Di})$$
$$=1+S(T_I+\sum_i T_{Di})$$
$$+S_2\sum_i T_{Di}(T_I+\sum_h T_{Di+h})+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(102)$$

を満足するような G_{R1} を構成することにより求める特性を得ることができる。

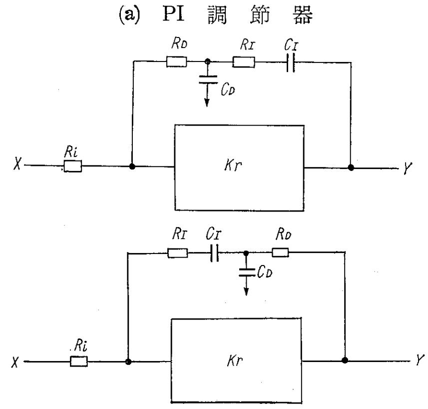


第８図　調節器の基本構成
Fig. 8. Basis diagram of controller



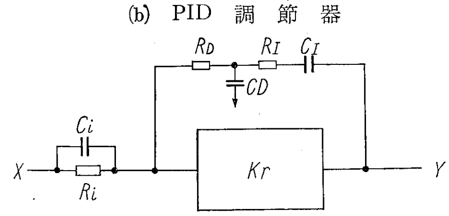
$G_i=\frac{1}{R_i}\qquad G_F=\frac{SC_I}{1+SC_I\,R_I}$

(a) PI　調　節　器



$G_i=\frac{1}{R_i}\qquad G_F\doteqdot\frac{SC_I}{(1+SC_I\,R_I)(1+SC_D\,R_D)}$

(b) PID　調　節　器



$G_i=\frac{1+SC_iR_i}{R_i}\qquad G_F\doteqdot\frac{SC_I}{(1+SC_I\,R_I)(1+SC_D\,R_D)}$

(c) $PID_1\,D_2$　調　節　器

第９図　調節器の基本回路
Fig. 9. Basis circuit of controller

調節器の基本構成を第8図に示す．G_F は帰還要素の特性，G_i は入力要素の特性である．また K_r は演算増幅器の増幅度を示す。

調節器の特性は

$$G_R=\frac{G_i K_r}{1+K_r G_F} \quad \cdots\cdots(103)$$

となる．式(103)で $|K_r G_F|\gg 1$ を満足する角周波数 ω の領域では G_R は近似的に式(104)で表わされる。

$$G_R \fallingdotseq \frac{G_i}{G_F} \quad \cdots\cdots(104)$$

式(101)，(102)，(104)から必要な G_i，G_F の特性を求めることができる。

第9図に調節器の基本回路を示す。

参考文献

(1) Keßler "Über die Vorausberechnung optimal abgestimmter Regelkreise", Teil I～III
Regelungstechnik, Heft 12, 1954
Heft 1, 1955
Heft 2, 1955

(2) Keßler "Das Symmetrische Optimum", Teil I, Teil II
Regelungstechnik, Heft 11, 1958
Heft 12, 1958

発明の紹介

交流量検出方式

（特許第 413486 号）

近年トランジスタ技術の進歩に伴って，可動接点などをもたない静止形継電器の開発が行なわれ，シュミット回路を用いたものなどが実用に供されるようになりました。

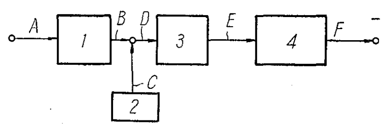
このシュミット回路においては，交流量を整流し，これをろ波器により平滑にして，エミッタ接地マルチバイブレータに印加し，シュミット回路の動作感度以上になると出力電気量が跳躍的に生じることを利用しております。

この方式では，交流量を整流した直流電圧はリップル分を含むため，シュミット回路の直流規準値がこの整流直流電圧に近い値である時は，規準値を超過したリップルの山の部分でシュミット動作し，その谷の近くでは動作しません．したがってこの場合シュミット回路の出力は断続したパルス状出力となり，この範囲では継電器の確実な動作を期待することができません。

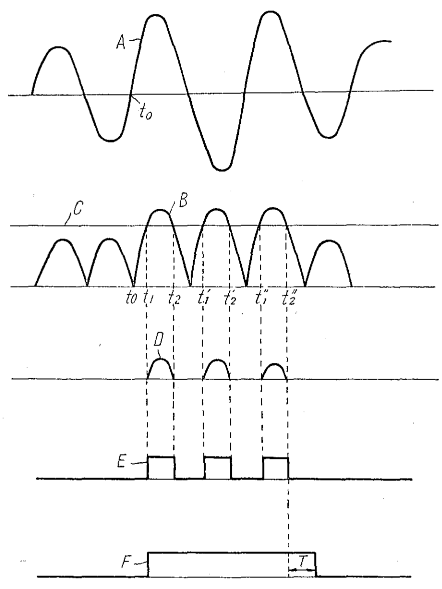
この発明は，検出すべき交流量を直接全波整流し，この全波整流波形の波高値の近傍を規準直流電圧と比較し，これにより超過した部分の電圧を検出して，その波形の幅に相当した時間幅をもつパルス電圧に変換し，さらにこのパルス電圧をパルス連続化回路によって連続出力信号に変えることにより，従来のものの欠点を除去するようにしたものであります。

本発明を図について説明しますと，第1図で1は全波整流器で，交流入力電圧 A を受け，その整流出力電圧 B を規準電圧発信器2の電圧 C と比較します．3は増幅および整形回路で，B と C の差電圧 D に対応してパルス状電圧 E を発生します．このパルス出力電圧 E をパルス連続化回路4に導き，端子6に動作用出力 E を得ます。

第2図からわかるように，いま時刻 t_0 で検出すべき交流量 A に変化を生ずると，期間 t_1～t_2，t_1'～t_2'，t_1''～t_2'' の間において差電圧 D が得られ，増幅および整形回路3によりパルス電圧 E に変換され，さらに連続回路4により，パルス電圧の発生している期間継続する直流動作出力 F が得られます．なお規準値を超過した入力量の消失後，パルス連続化回路4の内部時定数による時間 T だけ，出力信号 F は持続します。



第1図



第2図

（特許課　中平）

＊本誌に記載されている会社名および製品名は，それぞれの会社が所有する
　商標または登録商標である場合があります。